

Auf einen Blick

Über den Autor	9
Einleitung	25
Teil I: Natürliche Zahlen und Mengen – im Auge des Informatikers	31
Kapitel 1: Zahlen und ihre Logik	33
Kapitel 2: Im Assembler-Code der Mathematik – Handreichungen für Ungläubige ..	57
Kapitel 3: Mengenlehre – im Maschinenraum der Mathematik	69
Teil II: Diskrete Strukturen	99
Kapitel 4: Spezielle Beziehungen – Äquivalenzen und Ordnungen	101
Kapitel 5: Allgemeine Beziehungen und Beziehungskisten	117
Kapitel 6: Gruppen – es kann nicht nur eine geben	131
Kapitel 7: Ringe und Körper	147
Kapitel 8: Graphentheorie	159
Teil III: Analysis für Informatiker	183
Kapitel 9: Reelle Zahlen – der virtuelle Sprung in die Unendlichkeit	185
Kapitel 10: Pflegeleichte Funktionen – Stetigkeit und Differenzierbarkeit	229
Kapitel 11: Integrale	271
Teil IV: Vom Würfelspiel zum Algorithmus	283
Kapitel 12: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Regeln im Regellosen	285
Kapitel 13: Die klassischen Verteilungen	317
Kapitel 14: Testen! – Denn Vertrauen ist nicht immer gut	341
Kapitel 15: Probabilistische Algorithmen – theoretisch interessant aus praktischen Gründen	361
Teil V: Sprung in den Hyperraum	375
Kapitel 16: Vektoren – aggregierte Zahlen	377
Kapitel 17: Transformationen	419
Kapitel 18: Lineare Gleichungssysteme – Number Crunching in der linearen Algebra	439
Teil VI: Höhere Weihen in der Analysis	453
Kapitel 19: Skalierung der Differenzierbarkeit	455
Kapitel 20: Potenziale als Stammfunktionen	473
Kapitel 21: Steilkurs in komplexer Funktionentheorie	485
Kapitel 22: Hilberträume	503

Teil VII: Anhang	547
Anhang A: Methoden einer funktionellen Mengentheorie.....	549
Anhang B: Binomialverteilung versus Poissonverteilung.....	565
Anhang C: Programmierung komplexer Zahlen als abstrakte Datentypen	567
Anhang D: Berechnung von Determinanten.....	575
Anhang E: Matrizenkalküle.....	581
Anhang F: Benutzte Symbole.....	585
Stichwortverzeichnis	589

Inhaltsverzeichnis

Über den Autor	9
Danksagungen	9
Einleitung	25
Über dieses Buch	25
Wen hatten wir bei diesem Buch besonders vor Augen	25
Durch welche Brille sehen wir also den Informatiker?	26
Und was bedeutet dies für uns?	26
Haben wir auch Nichtinformatiker als potenzielle Leser im Blick	27
Wie kann man dieses Buch lesen?	27
Welche Besonderheiten finden sich in unserem Buch	27
Auf welche weiteren (kleinen) Innovationen dürfen wir hinweisen?	28
Wann ist genug genug?	29
Und weitere Literatur?	29
Kommunikation mit Autoren	30
TEIL I	
NATÜRLICHE ZAHLEN UND MENGEN – IM AUGEN DES	
INFORMATIKERS	31
Kapitel 1	
Zahlen und ihre Logik	33
Was es über die Vielfalt der Zahlen zu sagen gibt	33
Zahlen zählen	34
Zahlen aufs Papier – und später auf den Rechner	35
Es darf auch etwas mehr sein – über die natürlichen Zahlen hinaus	36
Ganzzahlige Brüche – ein zweiter Nachschlag	37
Die Welt der rationalen Zahlen ist für Informatiker genug – Mathematiker sind weniger bescheiden	39
Komplexe Zahlen erweitern den Zahlenraum ein weiteres Mal	41
Blick auf die Gipfel: Hyperkomplexe Zahlen und Oktionen	44
Wir wissen nun, über was wir reden, wir wollen jetzt wissen, wie wir darüber reden	45
Prädikat – besonders wertvoll	45
(Mathematische) Wahrheit	46
Operatoren – Aus Zahlen werden Zahlen	47
Logische Operatoren – Schnittstellen zur Logik	48
Verrechnung von Wahrheitswerten	48
Junktoren	48
Wahrheitstabellen	49
Für den einen ist es duplo, für den anderen die längste Praline der Welt – zur Doppelrolle der Zahlen in der formalen Logik	49

Quantoren in der Logik – Prädikate erhalten durch sie ihre Power	52
Der Existenzquantor \exists	53
Umsetzung des Existenzquantors in eine Schleife für Programmierer	53
Allquantor \forall	54

Kapitel 2

Im Assembler-Code der Mathematik – Handreichungen für Ungläubige

57

Gehen wir zurück auf Los	57
Was passiert eigentlich beim Rechnen?	58
Wir bringen dem Computer das Rechnen bei	58
Wie sehen die nächsten Schritte aus?	59
Rekursion – Vorbereitungen für die Induktion	60
Induktion – mit Warp 10 durch alle Zahlen	62
Anwendungen der Induktion – Return on invest	63
Beweis des Assoziativgesetzes	64
Wir kennen die Zahlen vom Zählen her – können wir sie auch abstrakt charakterisieren?	65
Unendlich viele Zahlen auf einem endlichen Rechner?	66

Kapitel 3

Mengenlehre – im Maschinenraum der Mathematik

69

Mengenlehre – fängt man damit nicht immer an?	70
Die Sprache der Mengenlehre – Goethe wäre »not«	70
Erste Anforderungen an den Mengenbegriff	71
Mengentheoretische Operationen	72
Äquivalenz von Aussagen – Gleichheit von Mengen	74
Eigenschaften der Operationen \cup , \cap und \setminus	74
Fallstricke und Sicherungen	76
Weitere mengentheoretische Operationen	77
Mengen als logische Bausteine für die Implementierung von Zahlen	80
Spezielle Realisierungen des Zählprozesses	80
Mengen – was kann man sich darunter vorstellen	83
Linux-Filesystem als Modell für ein Mengensystem	83
Infinite in all directions	85
Mengen für Datenbanker	86
Abstraktionen	87
Datenbanken? – Keep it simple and stupid	88
Nur für Theoretiker: Suchen, bis die Sterne verglühen	88
Wer hat Angst vor Graphen?	90
Urlemente – ein bisschen Medienbruch	92
Mengenlehre für »Informatiker mit der harten Kinnlade«	93
Prädikatenlogik mit einem einzigen Prädikat	93
Skolemisierung – oder wie destilliert man Operationen aus Aussagen	96

TEIL II DISKRETE STRUKTUREN..... 99

Kapitel 4 Spezielle Beziehungen – Äquivalenzen und Ordnungen..... 101

Äquivalenzrelationen – das Gleiche versus dasselbe	102
Äquivalenzrelation – die Erste	103
Äquivalenzrelation – die Zweite	108
Ordnungsrelationen – Ordnung in der mathematischen Welt.....	109
Geordnete Zahlen – die kleiner/gleich Beziehung.....	109
Verträglichkeiten.....	110
Teilbarkeit – auch eine Ordnung.....	111
Auch die Teilbarkeit ist relativ verträglich und pflegeleicht.....	111
Die mengentheoretische Inklusion – eine Ordnung für sich.....	112
Die Ordnungsbeziehungen – was haben sie gemein, was unterscheidet sie	112
Ordnungsbeziehungen und Grenzen.....	113
Graphen als Medium für die Darstellung partieller Ordnungen.....	114

Kapitel 5 Allgemeine Beziehungen und Beziehungskisten..... 117

Beziehungen als Tabellen.....	118
Inoffizielle Beziehungen.....	119
Realisierungen inoffizieller Beziehungen	120
Operieren mit Beziehungen.....	122
Jemanden kennen, der jemanden kennt, der Beziehungen hat.....	123
Spezialfälle: Verknüpfungen mit der inversen Beziehung.....	124
Verknüpfungen unterschiedlicher Relationen.....	125
Ausblick auf Relationen zwischen unterschiedlichen Mengen.....	126
Eindeutige Beziehungen – auf dem Weg zu Funktionen	127
Väter und Väter von Vätern.....	128
Funktionen und ihre allgemeinen Eigenschaften	129

Kapitel 6 Gruppen – es kann nicht nur eine geben..... 131

Über die Addition ganzer Zahlen.....	131
Beweis der Eindeutigkeit des neutralen Elements.....	132
Von den ganzen Zahlen zum allgemeinen Gruppenbegriff.....	132
Abstrakte kommutative Gruppen G	133
Nichtkommutative Gruppen.....	133
Beispiele von in der Natur auftretenden Gruppen – Symmetriegruppen...	134
Gruppen und Faktorgruppen.....	139
Faktorgruppen der ganzen Zahlen.....	139
Allgemeine Gruppen und Faktorgruppen.....	141
Der Index einer Untergruppe $H \subset G$	142
Untergruppen endlicher Gruppen.....	143

Kapitel 7

Ringe und Körper	147
Überblick Ringe	148
Überblick Körper	149
Ein Rückblick auf die Teilbarkeit und die Primzahlen	149
\mathbb{Z}_n als Restklassenring	151
Wohldefiniertheit der Operationen auf den Restklassen	151
Der Euklidische Algorithmus	152
Einheiten in \mathbb{Z}_n	153
Eulersche φ -Funktion	153
Return on Invest – das RSA Verfahren in der Kryptologie	154
Asymmetrische Verschlüsselungsverfahren	155
Das RSA-Verfahren in der Theorie	155
Praktische Bemerkungen zum RSA-Verfahren	157

Kapitel 8

Graphentheorie	159
Zur Motivation	159
Das Haus vom Nikolaus	160
Gerichtete und ungerichtete Graphen	160
Zusammenhängende und unzusammenhängende Graphen	161
Schlingen und parallele Kanten, Nullgraph und einfacher Graph	162
Eckengrad	163
Algorithmische Eigenschaften des Eckengrads	164
Handshake-Lemma	164
Königsberger Brückenproblem	166
Eulergraph und Eigenschaften	167
Eulerkreis/Eulersche Touren	168
Adjazenzmatrix	168
Wann sind Graphen isomorph? – Adjazenzmatrizen	169
Alternative Tabellendarstellung – Inzidenzmatrizen	170
Bäume	171
Definition und Eigenschaften eines Baumes	171
Spannbaum	171
Definition von Wäldern	171
Wurzelbaum	172
Binärbäume	174
Suchbaum	175
Traversieren von Wurzelbäumen	175
Wie gehören Binärbäume und algebraische Ausdrücke zusammen?	176
Kürzeste Wege finden	177
Kruskal-Algorithmus	180
Prim-Algorithmus	180
Dijkstra-Algorithmus	181

TEIL III ANALYSIS FÜR INFORMATIKER..... 183

Kapitel 9

Reelle Zahlen – der virtuelle Sprung in die Unendlichkeit..... 185

Irrationale Zahlen.....	185
$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.....	186
Reelle Zahlen.....	187
Die Einführung der reellen Zahlen – für Informatiker eine kleine Revolution.....	188
Elementare Eigenschaften der reellen Zahlen.....	189
Abschätzungen, die Analysis lebt davon.....	191
Betragsfunktion und Dreiecksungleichung.....	191
Bernoullische Ungleichung.....	193
Der Umgebungsbegriff.....	194
Unendliche Folgen.....	194
Technische Definition der Konvergenz.....	196
Arbeiten mit der technischen Definition.....	196
Besondere Eigenschaften konvergenter Folgen.....	197
Hinreichende Konvergenzbedingungen beschränkter Folgen.....	198
Wichtige Spezialfälle: Die Folgen $(1 + 1/n)^n$ und $(1 + 1/n)^{n+1}$	200
Rekursiv definierte Folgen.....	201
Häufungspunkte von Folgen.....	205
Grenzwertsätze für Folgen – Handreichungen für Klausuren.....	206
Beweis des ersten Grenzwertsatzes.....	206
Beispielhafte Folgerungen aus den Grenzwertsätzen.....	207
Mehr Werkzeuge zur Bestimmung des Konvergenzverhaltens.....	209
Das Cauchysche Konvergenzkriterium.....	209
Grenzwerte unendlicher Reihen.....	210
Die harmonische Reihe.....	210
Begriffliche Einordnung der unendlichen Reihen.....	211
Cauchysche Konvergenzkriterium für unendliche Reihen.....	212
Einfache Beispiele unendlicher Reihen.....	212
Wurzel- und Quotientenkriterium – die wichtigsten	
Konvergenzkriterien für Reihen.....	213
Absolute Konvergenz.....	218
Die allgemeine binomische Formel.....	224
Die Fakultätsfunktion.....	224
Binomialkoeffizienten.....	225
Binomische Formel.....	226

Kapitel 10

Pflegeleichte Funktionen –

Stetigkeit und Differenzierbarkeit..... 229

Grundsätzliche Bemerkungen.....	230
»Durchhalteparolen« für die Analysis.....	231
Der Grenzwertbegriff bei Funktionen.....	232
Konvergenz mithilfe des Umgebungsbegriffs.....	233

Konvergenz unter Rückgriff auf Folgenkonvergenz	233
Konvergenzsätze	235
Anwendung der Konvergenzsätze auf die Exponentialfunktion	236
Stetige Funktionen	239
Beispiel einer Funktion, die nur an einer Stelle stetig ist	240
Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen	240
Differenzierbare Funktionen	243
Die Landau-Symbole $o()$ und $O()$	243
Differenzierbarkeit via $o(x)$	244
Differenzierbarkeit via Differenzenquotient	245
Beide Definitionen der Differenzierbarkeit sind äquivalent	247
Rechenregeln für Ableitungen	249
Verträglichkeit der Differenzialquotienten mit der Summenbildung	249
Produktregel	249
Quotientenregel	250
Kettenregel	251
Wichtige Beispiele differenzierbarer Funktionen	252
Differenzierbarkeit der Polynome	252
Ableitung der e -Funktion und des Logarithmus	253
Ableitungen der trigonometrischen Funktionen	254
Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	257
Der Satz von Rolle	258
Folgerungen aus dem Mittelwertsatz	259
Die Regeln von l'Hospital	259
Wichtige Beispiele für die Anwendung der l'Hospitalschen Regeln	261
Taylorpolynome und Taylorentwicklung	263
Beispiele von Taylorentwicklungen	267
Analytische Funktionen als »ganzheitliche« Funktionen	270

Kapitel 11

Integrale 271

Stammfunktionen	271
Integrale elementarer Funktionen	272
Partielle Integration	273
Integration per Substitution	275
Rationale Funktionen und Partialbruchzerlegungen	276
Bestimmte Integrale	279
Einstieg in die Flächenberechnung	279
Stammfunktionen »in action«	281

TEIL IV

VOM WÜRFELSPIEL ZUM ALGORITHMUS 283

Kapitel 12

Wahrscheinlichkeitsrechnung – Regeln im Regellosen 285

Am Anfang war das Spiel – grundlegende Begrifflichkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung	286
---	-----

Ereignisse und Elementarereignisse	286
Wahrscheinlichkeiten.....	290
Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten im formalen Rahmen	295
Bedingte Wahrscheinlichkeiten – corrigier la fortune.....	297
Bedingte Wahrscheinlichkeiten reengineered – die Formel von Bayes.....	302
Zufallsvariable – geeignete Codierungen zufälliger Ereignisse	303
Zufallsvariable – Übertragung von Wahrscheinlichkeiten auf Zahlenmengen	304
Summen und Produkte von Zufallsvariablen.....	305
Von der Zufallsvariablen zur Verteilungsfunktion.....	306
Mittelwerte in verschiedenen Ausprägungen: Erwartungswerte und Varianzen	308
Der Erwartungswert der Streuung – die Varianz	311
Korrelationen – synchrone Streuungen	313

Kapitel 13

Die klassischen Verteilungen 317

Binomialverteilung	317
Münzwurf mit geänderten Spielregeln.....	318
Erwartungswerte und Varianzen für binomialverteilte Zufallsvariablen.....	319
Geometrische Verteilung	321
Geänderte Spielregeln.....	322
Poissonverteilte Zufallsvariablen.....	323
Näherungsverfahren für die Binomialverteilung – die Poissonverteilung ..	324
Erwartungswerte und Varianzen poissonverteilter Zufallsvariablen.....	326
Stetige Verteilungen.....	328
Exponentialverteilung.....	329
Normalverteilung.....	333

Kapitel 14

Testen! – Denn Vertrauen ist nicht immer gut..... 341

Die Ungleichung von Tschebyscheff.....	343
Normalverteilung und Tschebyscheffsche Ungleichung in der Gegenüberstellung.....	345
Tschebyscheffsche Ungleichung und die Gesetze der großen Zahlen.....	347
Beispielhafte Anwendung des Maximum-Likelihood-Prinzips	349
Über das Testen von Hypothesen	350
Signifikanztests.....	350
Alternativtests	353
χ^2 -Anpassung und χ^2 -Test.....	358

Kapitel 15

Probabilistische Algorithmen – theoretisch interessant aus praktischen Gründen..... 361

Sortierverfahren.....	362
Statistische Analyse des Quicksorts.....	362

Monte Carlo und Las Vegas – die ganze Wahrheit und nichts als die Wahrheit ..	364
Quicksort durch die Brille von Las Vegas betrachtet.....	364
Las Vegas liberalisiert – nur noch »nichts als die Wahrheit«	364
Monte Carlo – »die ganze Wahrheit«.....	370

TEIL V**SPRUNG IN DEN HYPERRAUM..... 375****Kapitel 16****Vektoren – aggregierte Zahlen..... 377**

Erste Operationen mit Vektoren: Addition und skalare Multiplikation.....	377
Kräfte können in unterschiedlichen Reihenfolgen addiert werden.....	378
Die Addition von drei oder mehr Vektoren kann unterschiedlich geklammert werden.....	378
Zu jedem Vektor gibt es einen inversen Vektor.....	379
Vektoren können mit Zahlen multipliziert werden.....	380
Auch Geschwindigkeiten sind Vektoren	380
Das Skalarprodukt – hiermit erhält die Vektorrechnung ihre eigentliche Power.....	382
Das Skalarprodukt als Mittel zur Berechnung physikalischer Arbeit.....	382
Das Skalarprodukt erfasst geometrisch wichtige Sachverhalte – Orthogonalität, Länge und Abstand	383
Die Algebraisierung der Geometrie.....	383
Algebraisierung der Geometrie.....	384
Die Algebraisierung der Geometrie zum Zweiten	387
Die Seitenhalbierenden – revisited.....	387
Vektoren in Koordinatensystemen.....	389
Auch umgekehrt wird ein Schuh draus: Vektoren erzeugen ein Koordinatensystem.....	393
Abstrakte Vektoren: Vektorräume.....	397
Einstieg in die Klasse Vector	397
Spezifikation von Vektorräumen.....	399
Strategische Begriffe	401
Auch der abstrakte Vektorraum kann als Aggregat von Zahlen aufgefasst werden.....	406
Aber wie decodieren wir ein \vec{v} eines abstrakten Vektorraumes V praktisch?.....	408
Erweiterung der Vektorraumspezifikation durch abstrakte Skalarprodukte.....	411
Die zweite Chance des Mathematikers	417
Die Natur spielt mit.....	418

Kapitel 17**Transformationen..... 419**

Duale Basen.....	420
Kovariante und kontravariante Komponenten.....	422
Die Beziehungen zwischen kovarianten und kontravarianten Komponenten	422

Der Übergang zwischen ko- und kontravarianten Koordinaten bei orthonormierten Basen.....	423
Nicht orthonormale Basen – könnten wir auf sie verzichten?.....	424
Asymmetrische Verschlüsselungsverfahren mit Hilfe dualer Basen.....	426
Lineare Abbildungen.....	427
Drehungen.....	427
Matrizen – operationelle Codierung linearer Abbildungen.....	428
Basistransformationen.....	434
Matrizen der Basistransformation.....	434
Besondere Eigenschaften der Matrizen der Basistransformationen.....	434
Die Matrizen der Basistransformationen als Matrizen einer Abbildung.....	435
Basistransformationen orthonormierter Basen.....	437

Kapitel 18

Lineare Gleichungssysteme –

Number Crunching in der linearen Algebra 439

Gleichungssysteme und zugehörige Matrizen.....	440
Bedingungen der Lösbarkeit von Gleichungssystemen.....	441
Der Gaußsche Algorithmus.....	442
Homogene und inhomogene Gleichungssysteme.....	445
Determinanten in Aktion.....	446
Eigenwerte und Eigenvektoren.....	448
Auffinden der Eigenwerte.....	449
Berechnung der Eigenvektoren.....	449
Eigenvektoren und Diagonalisierung von Matrizen.....	450
Besonderheiten symmetrischer Matrizen.....	451

TEIL VI

HÖHERE WEIHEN IN DER ANALYSIS 453

Kapitel 19

Skalierung der Differenzierbarkeit 455

Behandlung von Funktionen zweier Variablen.....	455
Differenzierbarkeit von Funktionen zweier Variablen.....	456
Nichtdifferenzierbare Funktionen trotz Existenz partieller Ableitung.....	458
Hinreichende Bedingungen für die Differenzierbarkeit.....	461
Behandlung von Funktionen beliebig vieler Variablen.....	462
Vektorwertige Funktionen.....	463
Differenzierbarkeit vektorwertiger Funktionen.....	463
Rechenregeln für Gradienten und Funktionalmatrizen.....	464
Hesse-Matrix und Taylorentwicklungen.....	466
∇ als Vektoroperator.....	466
Kritische Punkte und Extremwerte.....	468
Analyse der Hesse-Matrix.....	469
Beispielrechnung zur Analyse kritischer Punkte.....	470

Kapitel 20	
Potenziale als Stammfunktionen	473
Generelle Bemerkungen zum Begriff Stammfunktion	473
Ansätze zur Definition des Integrals $\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} F(\vec{s}) d\vec{s}$	474
Notiz zu $F(\vec{s}_i) \cdot (\Delta\vec{s})_i = F(\alpha(t_i)) \cdot \alpha'(t_i)(\Delta t)_i$	475
Vektorfelder	475
Notwendige Integrationsbedingungen für Vektorfelder	476
Kurvenintegrale über Vektorfelder	477
Hinreichende Integrationsbedingungen für Vektorfelder	480
Existenz eines globalen Potenzials trotz Existenz einer Singularität	481
Beispielhafte Berechnung einer Potenzialfunktion	482
Kapitel 21	
Steilkurs in komplexer Funktionentheorie	485
Das formale Rechnen mit komplexen Zahlen	485
Addition komplexer Zahlen	486
Multiplikation komplexer Zahlen	486
Inverse komplexer Zahlen	486
Komplexe Zahlen als abstrakter Datentyp	487
Äquivalente Modelle komplexer Zahlen	487
Alternative Modelle	488
Auch Äquivalenzklassen von Polynomen verhalten sich wie komplexe Zahlen	490
Komplexe Differenzierbarkeit	492
Quick-and-dirty-Überlegungen	492
Ein zweiter Blick auf die Differenzierbarkeit komplexwertiger Funktionen	493
Komplexe Kurvenintegrale	494
Kurvenintegrale und komplexe Differenzierbarkeit	495
Auf dem Weg zur Cauchyschen Integralformel	496
Beweis der Cauchyschen Integralformel	496
Analytizität komplex differenzierbarer Formeln	498
Drei wichtige Folgerungen	500
Kapitel 22	
Hilberträume	503
Komplexe Vektorräume	504
Komplexe Skalarprodukte	505
Beispiele komplexer Vektorräume	507
Hilbertbasen für Tupel	510
Hilbertbasen für Treppenfunktionen	511
Reduktionen der Treppenbreite	512
Treppenfunktionen der Treppenbreite $\frac{1}{2}$	512
Ein neuer Ansatz – eine letzte Chance	515
Neue Basen, neue Normierungen	519
Die δ -Funktion – ein »Außenskelett« für Hilberträume	522

Management summary des Wegs hin zur δ -Funktion.....	524
Der Hilbertraum der periodischen Funktionen.....	526
Funktionen mit Periode 2π	526
Die e -Funktionen als universelle Bausteine	526
Fourieranalyse und Fourierkoeffizienten.....	527
Basistransformationen	528
Fouriertransformationen nicht periodischer Funktionen.....	529
Basisfunktionen für $2\pi l$ -periodische Funktionen.....	530
Analyse des Übergangs $l \rightarrow \infty$	530
Die Fouriertransformationen als Basistransformationen.....	532
Hilberträume in der Physik.....	533
Vektoren in der klassischen Physik.....	533
Vektoren in der Mikrophysik.....	534
Abstrakte Vektoren im Hilbertraum.....	534
Orte und Impulse.....	535
Die Heisenbergsche Unschärferelation.....	536
Hilberträume im Quantencomputing –elementare Konzepte	539
Bits und Qubits.....	539
Bloch-Sphäre.....	540
Operationen auf der Bloch-Sphäre.....	541
2-Qubits.....	542
EPR-Paare und Quantenteleportation.....	544

TEIL VII

ANHANG..... 547

Anhang A: Methoden einer funktionellen Mengentheorie.....	549
Zielkonflikte.....	549
Java-Z-Funktionen.....	550
Anhang B: Binomialverteilung versus Poissonverteilung	565
Anhang C: Programmierung komplexer Zahlen als abstrakte Datentypen.....	567
Anhang D: Berechnung von Determinanten.....	575
Anhang E: Matrizenkalküle	581
Matrixmultiplikation	581
Anhang F: Benutzte Symbole.....	585

Stichwortverzeichnis..... 589