

# Einleitung

---

## Über dieses Buch

---

Mathematik für Informatiker für *Dummies*? Wie kann so etwas gehen, denn eigentlich gibt es sie nicht, die Dummies in Mathematik. Wir kennen von Künstlern den Spruch, dass in jedem Menschen ein Künstler<sup>1</sup> stecke. Ihn kann man verallgemeinern und in jedem Menschen einen Mathematiker sehen. In diesem Sinne ist die Bemerkung eines erfahrenen Mathematiklehrers zu verstehen: »Es gibt nur zwei Arten von Menschen: Mathematiker und Idioten«. Kurzum: »dummy« meint hier kein menschliches Attribut, sondern mehr eine verbreitete *Haltung* gegenüber der Mathematik. Und so ist eines der Ziele dieses Buchs, Sie zur Mathematik zu verführen und die Hoffnung zu haben, dass der Appetit (auf Mathematik) beim Essen kommt. Dann nämlich, wenn man verblüfft feststellt, dass man es ja eigentlich doch kann.

## Wen hatten wir bei diesem Buch besonders vor Augen

Hinter dem angedeuteten *Spaßfaktor* einer Verführung (zur Mathematik) steht natürlich ein ernstes Anliegen. Auch in der Informatik wird im real existierenden »Moralklima« Mathematik von den Studenten (zu) oft als bedrohlich empfunden. Als Mathematiker mag man das – vergleichbar mit einer Spinnenphobie – als völlig unnötig empfinden. Das hilft den Betroffenen nicht. Ansätze, solche oder vergleichbare Ängste zu überwinden, sind die systematische Desensibilisierung oder die gezielte Reizüberflutung. In diesem Buch finden wir beides.

Nun kann man im täglichen Leben, Spinnen weitgehend aus dem Wege gehen, beim Informatikstudium gelingt das gegenüber der Mathematik nicht. Man mag für die Mathematik in der Informatik die Sinnfrage stellen, ob also ein Informatiker das wirklich wissen muss. Und man wird bei objektiver Betrachtung zum Schluss kommen, dass man im Beruf nicht alles brauchen wird. Mathematik und Informatik haben jedoch so viel gemein (nicht nur vom Methodischen her), dass es nicht nur auf Tradition beruht, Informatiker durch die Mathematik hindurchzuziehen. (Nach dem Motto: »Das haben wir schon immer so gemacht«.)

Unsere Herangehensweise im Sinne einer »ars amandi« orientiert sich also an den besonderen Bedürfnissen der Informatik. Der gewählte Zungenschlag richtet sich gezielt an die Sprechweisen der Informatiker. So wird z.B. ein »Axiomensystem« (schon der Begriff – so haben wir uns sagen lassen – kann Schauer über den Rücken laufen lassen) auf natürliche Weise zu einem »Pflichtenheft«, einem Begriff, mit dem Informatiker schon von vornherein viel mehr anfangen können. Dabei transportiert der Begriff »Pflichtenheft« genau das, was auch ein »Axiomensystem« charakterisiert: die Trennung zwischen dem Was und dem Wie, zwischen abstrakter Anforderung und konkretem Modell.

<sup>1</sup> Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wurde in diesem Buch zur Bezeichnung von Personen die grammatikalisch maskuline Form gewählt. Gleichwohl beziehen sich die Aussagen auf Angehörige aller Geschlechter.

## Durch welche Brille sehen wir also den Informatiker?

Nun, er ist nicht der »Edelprogrammierer«, wie ein guter Freund einmal bemerkte, er muss mit Konzepten operieren können. Der akademisch ausgebildete Informatiker verhält sich zum Programmierer wie der Architekt oder Bauingenieur zum Polier. Man kann ihn »zum Kunden mitnehmen«, wie ein Geschäftsführer einmal bemerkte. Selbstverständlich kann und wird ein Informatikbachelor, besonders zu Beginn seiner Laufzeit, konkrete Programmieraufgaben ausführen. Die höheren Gehälter liegen jedoch im konzeptuellen Tun, etwa in der Systemanalyse.

## Und was bedeutet dies für uns?

An dieser Stelle läuft man als Mathematiker gerne in ein systemisches Problem. Die mathematische Sozialisierung im Studium (ver)führt zu einer durchgehenden Präzisierung, die für die Informatik nicht immer hilfreich ist. Und nicht nur dort. So bemerkte der berühmte Mathematiker Hermann Weyl einmal:

*»Die zwingende Genauigkeit, deren das mathematische Denken fähig ist, hat manche zu einem Stil verführt, der den Leser in eine grell erleuchtete Zelle einschließt, wo jede Kleinigkeit mit schwindelnder Helligkeit ohne Relief hervorsticht. Ich (jedoch) liebe die offene Landschaft unter einem blauen Himmel mit tiefer Perspektive, wo der Reichtum naher, scharfer Details langsam zum Horizonte verschwindet.«*

Auch in der Physik gelten dieselben Erfahrungen. Ein Blick in die mit Kultstatus verbundenen *Feynman Lectures* sagt uns:

*»What it means really to understand an equation – that is, in more than a strictly mathematical sense – was described by Dirac. He said: «understand what an equation means if I have a way of figuring out the characteristics of its solution without actually solving it.»...A physical understanding is a completely unmathematical, imprecise, and inexact thing, but absolutely necessary for a physicist.«*

Das wirkliche *Verstehen* sowohl in als auch außerhalb der Mathematik beruht auf *Einsicht*, auf dem *Erfassen von Zusammenhängen*. Oder, um ein letztes Mal einen Rat von Feynman zu bemühen: *»Sag's mit Worten, wenn wir wissen, über was wir reden, kriegen wir die Mathematik schon hin.«* Das bedeutet, dass wir, besonders im hinteren Teil des Buchs schon mal auf »hand wavy arguments«, auf qualitative Argumente, zurückgreifen.

Der Stil hat deshalb oft etwas von einem Erzählstil. »Hardcore Bourbakisten« sind es gewohnt, strukturiert nach dem Schema Voraussetzung – Behauptung – Beweis zu operieren. Diese Sichtweise hat durchaus ihre Berechtigung, und gerade in der Programmierung ist eine klare Strukturierung das A und O. Allzu häufig kommt die Motivation einer Vorgehensweise unter die Räder. Sowohl in der Mathematik als auch in der Programmierung.

Häufig kann ein gutes Beispiel einen Beweis ersetzen (wenn es um Einsicht geht), wovon wir regen Gebrauch machen.

## Haben wir auch Nichtinformatiker als potenzielle Leser im Blick

Wir denken, dass auch für Mathematikstudenten ohne Bezug zur Informatik das Buch interessant sein könnte. Dabei haben wir besonders die Darstellung der Mengenlehre in den ersten Kapiteln vor Augen. Aber auch bei den weiteren Themen kann unser Buch als gute Ergänzung zu »harten« Mathematiklehrbüchern dienen. An mehreren Stellen verweisen wir auf die Unterschiede im mehr ingenieurmäßigen Denken eines Informatikers und dem mehr geisteswissenschaftlichen Denken des Mathematikers. Wir denken, dass hier jeder von jedem etwas lernen kann.

## Wie kann man dieses Buch lesen?

Ein Buch wie das vorliegende wird erfahrungsgemäß auch und besonders dann herangezogen, wenn »Not am Mann« herrscht, wenn ein Erste-Hilfe-Set benötigt wird. In dieser Situation fehlt (natürlich) die Zeit, ein Buch »cover to cover« durchzuarbeiten. Man benötigt also passende Entry-Points. Für ein solches Buch bedeutet dies, dass, um Vor- und Rücksprünge zu vermeiden, notwendige Sachverhalte redundant beschrieben werden müssen. Jemand, der das Buch chronologisch durcharbeitet, wird damit mit Wiederholungen konfrontiert.

Unterhält man sich mit Studenten, erfährt man, dass die elektronischen Medien, also YouTube und Co., häufig die erste Wahl der Informationsbeschaffung sind. Gegen die Nutzung dieser Medien ist grundsätzlich nichts einzuwenden. Und es finden sich dort viele didaktisch gut aufbereitete Videos. Allerdings fehlt diesen Videos das, was ein gutes Lehrbuch von vornherein bietet: ein ausgearbeitetes Mindmap der Zusammenhänge eines übergreifenden Themengebiets. Ein solches Mindmap muss ansonsten vom Studenten bei der Nutzung einzelner Videos selbst erstellt werden. Das bedeutet zusätzlichen Zeitaufwand. Als Ergänzung, als booster gewissermaßen, sind Lehrvideos uneingeschränkt zu empfehlen.

## Welche Besonderheiten finden sich in unserem Buch

Bücher mit dem Titel »Mathematik für Informatiker« gibt es sehr viele und sehr viele gute. Schaut man sich diese Bücher an, dann erkennt man allerdings, dass sie sich wenig von Büchern für Mathematiker unterscheiden. Man fragt sich an diesem Punkt, worin das Informatik-spezifische eigentlich besteht oder worin es bestehen sollte. Dies können spezifische Inhalte, besondere Darstellungsweisen und Methodiken sein.

Wir benutzen in diesem Buch eine Sprache, die dem Informatikjargon angepasst ist, und verweisen auf Konzepte, die zum Kern einer Informatikausbildung gehören. So benutzen wir z.B. das Konzept eines abstrakten Datentyps, wenn es um die Beschreibung abstrakter Objekte wie z.B. Gruppen oder Vektorräume geht. Wir implementieren wichtige mathematische Funktionen mittels Java-Code. Vor allem aber führen wir die Mengenlehre Informatik-affin und – wie wir glauben – auf eine innovative Weise ein.

Hierin stecken einige in den letzten 15 Jahren durchgeführte Experimente in der Vermittlung der Mengenlehre. Wir haben sie nicht als »Sahnehäubchen« über eine unabhängig von ihr betriebene Mathematik benutzt. Also nicht nur als eine Sprache, auf die man in der

Formulierung mathematischer Sachverhalte auch verzichten könnte. Stattdessen wurde die Mengenlehre als axiomatische Mengenlehre eingeführt. Mengen werden durch die Brille der Informatik als Objekte eines abstrakten Datentyps betrachtet, deren Eigenschaften im Sinne eines »Pflichtenhefts« formuliert sind. Es bestand ein Risiko, aber der Ansatz erwies sich didaktisch als erfolgreich.

Warum aber gingen wir dieses Risiko überhaupt ein? Hierfür gab es mehrere Informatikspezifische Gründe.

- ✓ Die Behandlung der axiomatischen Mengenlehre bereitet – wie schon angedeutet – ein einfaches und ein überschaubares Beispiel eines sogenannten abstrakten Datentyps vor.
- ✓ Die Syntax der axiomatischen Mengenlehre bietet ein Beispiel einer formalen Sprache, die als Programmiersprache aufgefasst und auch als solche operationell interpretiert werden kann.
- ✓ Die Mengenlehre dient auf natürliche Weise als Medium für die Implementierung natürlicher Zahlen. Informatiker können sich vorstellen, auf einem Rechner, der nur einen einzigen abstrakten Datentyp  $\text{Set}$  zur Verfügung stellt, alle weiteren Datentypen, nämlich die der natürlichen Zahlen, der ganzen Zahlen und der rationalen Zahlen gewissermaßen reengineerieren zu können. Im Anhang ist dieser hypothetische Weg ausprogrammiert.
- ✓ Bei dieser Vorgehensweise erkennt man eine enge Analogie zur Schichtenarchitektur eines Computersystems, mit der verdrahteten Hardware auf der untersten Ebene (also der Ebene der Maschinenbefehle) und den darüberliegenden Ebenen der Anwendungsprogramme.

In diesem Buch finden wir also neben Mathematik auch und besonders »Informatik inside«.

## Auf welche weiteren (kleinen) Innovationen dürfen wir hinweisen?

Einige weitere kleinere Innovationen (wenn es denn welche sein sollten), mögen hier erwähnt werden. Die im Teil über lineare Algebra beschriebene Verschlüsselungsmethode via verborgener dualer Basen fällt womöglich darunter. Auch die funktionale Verträglichkeit unterschiedlicher Datenstrukturen für die komplexen Zahlen haben wir in der Literatur in dieser Explizitheit nicht aufgefunden. Immerhin bietet dieser »Quasi-upcast« eine sehr schöne Eselsbrücke für die sogenannte Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichung für die komplexe Differenzierbarkeit.

Das Werfen von Münzen mit geänderten Spielregeln (Werfen mit einer immer größer werdenden Anzahl von Münzen) haben wir so in der Literatur auch noch nicht gefunden. Dies betrifft auch die besondere synoptische Gegenüberstellung von Binomial- und Poissonverteilung.

Die Diracsche  $\delta$ -Funktion ist für Ingenieure und Physiker unverzichtbar, für Informatiker eher ein Exot. Dass sie hier dennoch eingeführt wird, ist dem Quantencomputing

geschuldet, also einem Gebiet, das für Informatiker in Zukunft wichtiger werden dürfte. Für Ingenieure und Physiker fällt die  $\delta$ -Funktion oft »vom Himmel«. Wir haben hier einen Zugang gewählt, der zu mehr Hintergrundverständnis führen kann. Die gewählte Methodik wurde in einer fortgeschrittenen Mathematik-Vorlesung für Ingenieure getestet und akzeptiert.

## Wann ist genug genug?

Der in diesem Buch behandelte Themenkomplex umfasst einen großen Bereich, der dennoch eine Reihe offener Enden enthält. Die Inhalte der ersten Teile sind dabei klassisch gewählt. Im Einzelnen wird behandelt:

- ✓ Charakterisierung der Zahlen
- ✓ Diskrete Mathematik, algebraische Strukturen und ihre Beziehungen zu Datenbanken, Graphentheorie
- ✓ Analysis mit dem zentralen Begriff der Konvergenz in der Anwendung auf unendliche Folgen und Reihen, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit. Für Informatiker sind die Möglichkeiten der Taylorentwicklung von numerischem Interesse.
- ✓ Wahrscheinlichkeitsrechnung unter Einbeziehung probabilistischer Algorithmen
- ✓ Lineare Algebra unter besonderer Berücksichtigung unterschiedlicher Codierungsmöglichkeiten der Vektorobjekte
- ✓ Fortgeschrittene Konzepte der Analysis, komplexe Funktionentheorie und Hilberträume mit einem Ausblick auf die Datenstrukturen des Quantencomputing.

Es liegt ein wenig in der Natur der Sache, dass die späteren Kapitel etwas höhere Ansprüche stellen. Dennoch bleibt es *unser* Anspruch, auch dort mit geeigneten Handreichungen verständlich zu bleiben. Nun ist die Erstellung eines Buchs ein Projekt. Ein Projekt endet entweder damit, dass alle Probleme gelöst wurden, dass die Zeitdauer abgelaufen ist, dass die Ressourcen aufgebraucht wurden, dass das Projekt politisch beendet wurde. Am unrealistischsten ist die Beendigung mit der Lösung aller Probleme. So lässt auch ein solches Buchprojekt (viele) thematische Fragen offen, und Sie mögen dieses Buch als Sprungbrett sehen. Sollte das mit der Verführung zur Mathematik geklappt haben, ist der Zweck des Buchs erfüllt.

## Und weitere Literatur?

Auch wenn nach unseren Erfahrungen die heutige Studentengeneration eher zum Lehrvideo denn zur Monografie greift, stellt sich die Frage, auf welche ergänzende Literatur dennoch verwiesen werden könnte. Auch mit der Beschränkung auf den Suchbegriff »Mathematik für Informatiker« ergibt ein Blick in Amazon mehrere Hundert Hits. Hier das eine oder andere Buch herauszugreifen, würde willkürlich wirken müssen. Und so möchten wir nur eine Ausnahme machen und auf das »gewichtige« Werk (auf unserer Küchenwaage erbrachte es 3,8 kg) von Arens und anderen mit dem schlichten Titel *Mathematik* verweisen. Dies ist zwar kein Buch mit der speziellen Zielgruppe Informatiker,

jedoch so umfassend und gleichzeitig »süffig«, dass es für diejenigen, die es noch genauer wissen wollen, als gute Referenz dienen mag.

## Kommunikation mit Autoren

---

Auch das beste Buch wird Fragen offen lassen und den Wunsch wecken, mit den Autoren direkt kommunizieren zu können. Senden Sie Ihre Kommentare an: [hans-juergen.steffens@hs-kl.de](mailto:hans-juergen.steffens@hs-kl.de). Wir freuen uns auf Ihr Feedback.